Esercizio. *Un punto materiale P di massa m è mobile senza attrito sulla superficie interna di un cono di asse verticale e semiapertura $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Inizialmente il punto P si trova a quota h al di sopra del vertice del cono e ha velocità orrizontale di intensità pari a v_0. Determinare qualitativamente il moto del punto a seconda del valore di v_0.*

Soluzione. L'equazione del cono è

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il sistema ha due gradi di libertà. Possiamo scegliere come coordinate libere le coordinate polari sul piano in cui si trova il punto P. In effetti, una volta fissate queste, abbiamo:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ z &= r \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2,$$

l'energia cinetica del punto è data dalla formula

$$T = \frac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

e la Lagrangiana da $L = T - mgr$. Le equazioni di Lagrange sono date da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 2m(\ddot{r} + \frac{g}{2} - \frac{r}{2}\dot{\theta}^2) = 0. \end{aligned}$$

La prima ci dice che la quantità $r^2\dot{\theta}$ è costante lungo le soluzioni. In particolare denotati con $\dot{\theta}_0$, $r_0 = z_0$ i valori di θ e r all'istante iniziale, avremo

$$r^2\dot{\theta} = h^2\dot{\theta}_0$$

Inoltre, tenuto conto che $\dot{r}_0 = \dot{z}_0 = 0$, abbiamo

$$v_0^2 = r_0^2\dot{\theta}_0^2$$

e dunque

$$r^2\dot{\theta} = h^2\dot{\theta}_0 = \pm h v_0.$$

Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\ddot{r} = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\frac{h^2 v_0^2}{r^3}.$$

Poiché $z = r$ avremo inoltre

$$\ddot{z} = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\frac{h^2 v_0^2}{z^3}.$$

che sono le equazioni di un punto materiale sulla semiretta $z \geq 0$ soggetto al "potenziale efficace"

$$U_{eff} = \frac{g}{2}z + \frac{1}{4}\frac{h^2 v_0^2}{z^2}.$$

Il caso $v_0 = 0$ è banale. Il punto scende fino a raggiungere il vertice del cono. Assumeremo $v_0 \neq 0$. In tal caso il grafico approssimato del potenziale presenta un unico minimo (per $z > 0$ che è la regione che ci interessa) in $z = \left(\frac{h^2 v_0^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$, e tende a $+\infty$ per $z \to 0^+$ e $z \to +\infty$. Il moto è dunque sempre "periodico" in z e oscillerà tra i punti $z = z_{min}, z_{max}$ in cui l'energia E del sistema ridotto soddisfa

$$E = U_{eff}(z).$$

Analizziamo più nel dettaglio tali punti. La costante E può essere scritta come funzione di h e v_0:

$$E = \frac{1}{2}\dot{z}_0^2 + U_{eff}(t = 0) = \frac{g}{2}h + \frac{1}{4}v_0^2.$$

Dunque i punti $z = z_{min}, z_{max}$ si ottengono risolvendo il sistema

$$\frac{g}{2}z + \frac{1}{4}\frac{h^2 v_0^2}{z^2} = \frac{g}{2}h + \frac{1}{4}v_0^2$$

che può essere scritto nella forma

$$(z - h)\left(\frac{g}{2} - \frac{1}{4}\frac{(h + z)}{z^2}v_0^2\right) = 0.$$

Esso ammette tre radici

$$z = h,\ z = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 8v_0^2 hg}}{4g},\ z = \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 + 8v_0^2 hg}}{4g}.$$

L'ultima non ci interessa perché è negativa. Delle due restanti una sarà uguale a z_{min} e l'altra a z_{max}. È facile verificare che per $v_0^2 > hg$ si ha

$$z_{min} = h,\ z_{max} = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 8v_0^2 hg}}{4g}$$

e per $0 < v_0^2 < hg$ i ruoli si scambiano. Ciò significa che, nel primo caso il punto, posto[1] inizialmente ad una quota di $z = h$, salirà fino a raggiungere, prima di ridiscendere, la quota massima a $z = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 8v_0^2 hg}}{4g}$; nel secondo caso il punto, posto inizialmente ad una quota di

[1]Ovvero, date le condizioni iniziali $z(0) = h, \dot{z}(0) = 0$.

$z = h$, prima di risalire, scenderà fino ad una quota minima di $z = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 8v_0^2 hg}}{4g}$. Vi è infine un terzo caso corrispondente a $v_0^2 = hg$ in cui il punto si mantiene sempre alla stessa quota $z = h$ che coincide con il punto in cui il potenziale efficace ha un minimo. Questa analisi è in accordo con il fatto che dall'equazione

$$\ddot{z} = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\frac{h^2 v_0^2}{z^3}.$$

segue che il valore dell'accelerazione $\ddot{z}$ all'istante iniziale è pari a

$$\ddot{z}(t = 0) = -\frac{g}{2} + \frac{v_0^2}{2h} = \frac{1}{2h}(v_0^2 - hg).$$

Essa è positiva (il punto sale) quando $v_0^2 > hg$, negativa (il punto scende) quando $0 < v_0^2 < hg$, nulla quando $v_0^2 = hg$.